第 2 章　插值法

2.2 拉格朗日插值

2.2 拉格朗日插值

1. 知识引入
2. 理论讲解
3. 融会贯通
4. 课堂小结

1 知识引入

Knowledge introduction

- 发展历史
- 问题提出

发展历史

插值法是一种古老的数学方法，来自于生产实践. 在中国古代，插值法的发展与天文历法息息相关.

- 东汉时期刘洪在《乾象历》中使用了一次插值公式计算月行度数.
- 隋朝时期刘焯在《皇极历》(公元600年) 中使用等间距节点二次插值公式推算出五星位置和日、月食的起运时刻.
- 唐朝时期僧一行在《大衍历》(公元727年)中将插值法推广到了二次不等间距的情形.
- 元朝时期王恂、郭守敬等在《授时历》(1280年)中提出“招差法”（类似差分插值）的插值法对天体运动距离是有关时间的三次函数这一设想进行验证.
- 元朝时期朱世杰在《四元玉鉴》(1303年)中提出了一个四次插值公式.

历史发展

然而，系统的插值理论是在17世纪微积分产生之后才逐渐发展起来的.

1795年，法国数学家拉格朗日在其著作《师范学校数学基础教程》中提出了一种插值方法，后人以他的名字命名了这种方法.

近几十年，由于造船、航空、精密机械加工、化工等实际问题的需求和计算机的使用，插值法在理论上和实践上得到迅速发展，获得了更广泛的应用.

问题提出

甘油粘度问题 甘油（丙三醇，$C_3H_5(OH)_3$）是一种液体，可作为制造从肥皂到(爆炸性的)硝化甘油等诸多产品的原料.

甘油的粘度值 μ 是关于温度 T 的函数 $\mu=\mu(T)$. 经测量，甘油在给定的温度下的粘度值如下表所示.

$T(°C)$	0	10	20	30	40	50
$\mu(N\cdot s/m)$	10.60	3.810	1.492	0.6290	0.2754	0.1867

因生产需求，现需计算甘油在 $22°C$ 下的粘度值.

此时，粘度值该如何计算呢？

2 理论讲解

Interpretation of the theory

- 线性插值
- 抛物线插值
- 拉格朗日插值多项式

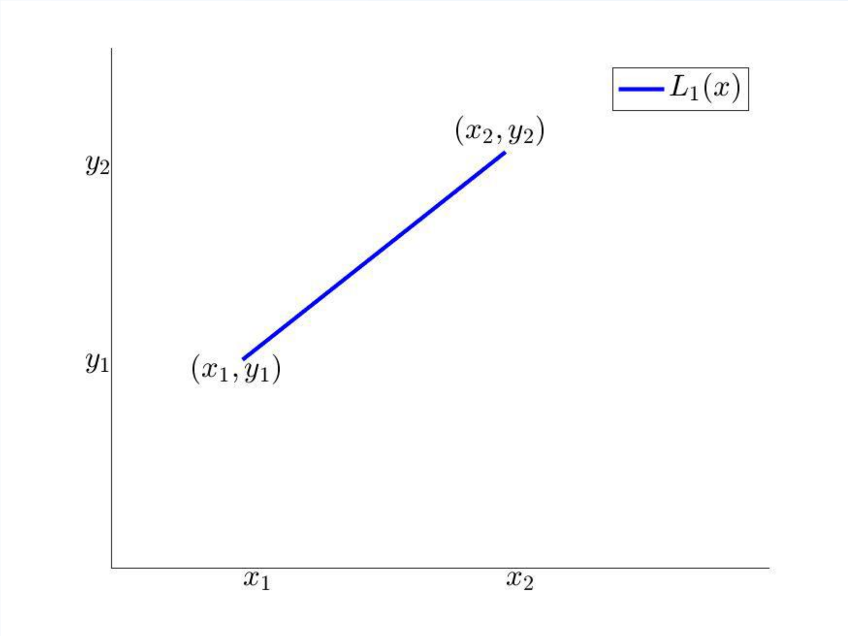
线性插值

给定两点 (x_0, y_0) 和 (x_1, y_1)，则通过这两点的线性插值多项式为

点斜式：$L_1(x) = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0,$

两点式：$L_1(x) = y_0\boxed{\dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1}} + y_1\boxed{\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}}.$

从几何上看它是通过 点 (x_0, y_0) 和 (x_1, y_1) 的一条直线.



线性插值

记

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},\quad l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0},\ 1$$

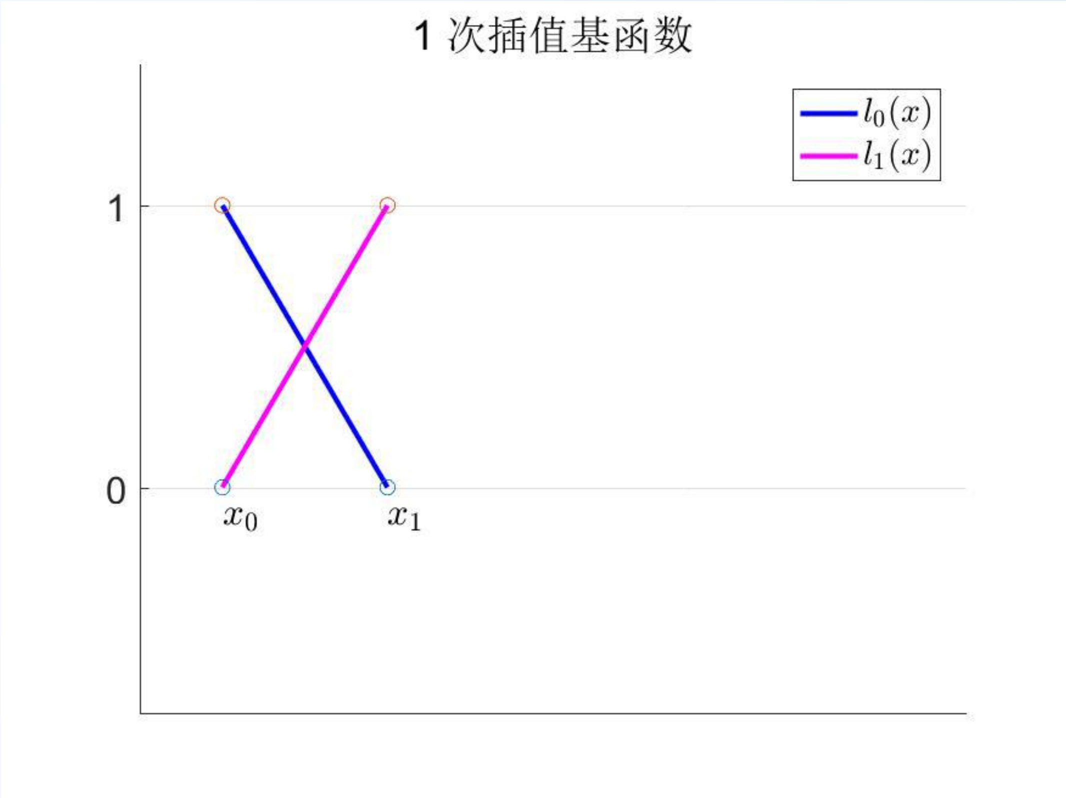
称 $l_0(x)$ 和 $l_1(x)$ 为1次插值基函数(如右图所示).

容易发现

$$\boxed{l_k(x_j)=\delta_{kj}=\begin{cases}1, & k=j,\\ 0, & k\neq j,\end{cases}}\quad k,j=0,1.$$

从而，$L_1(x)$可以看成是基函数 $l_0(x)$ 和 $l_1(x)$ 的线性组合，组合系数分别为y_0 和 y_1 ，即

$$L_1(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x). \qquad (2.2.1)$$



抛物线插值

下面将（2.2.1）进行推广.

设 (x_0, y_0), (x_1, y_1)和 (x_2, y_2) 不共线，则通过这三点的二次插值多项式为

$$L_2(x) = y_0\boxed{l_0(x)} + y_1\boxed{l_1(x)} + y_2\boxed{l_2(x)},$$

其中 $l_0(x), l_1(x), l_2(x)$ 是二次多项式，且满足

$$\boxed{l_k(x_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases}} \quad k, j = 0, 1, 2.$$

抛物线插值

下面推导 $l_0(x), l_1(x), l_2(x)$ 的具体表达式.

注意到 $l_0(x_1) = l_0(x_2) = 0$，从而有

$$l_0(x) = c(x - x_1)(x - x_2),$$

其中 c 为常数.

进一步， 由 $l_0(x_0) = 1$，可推得 $c = \frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$.

因此,

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}.$$

同理可得

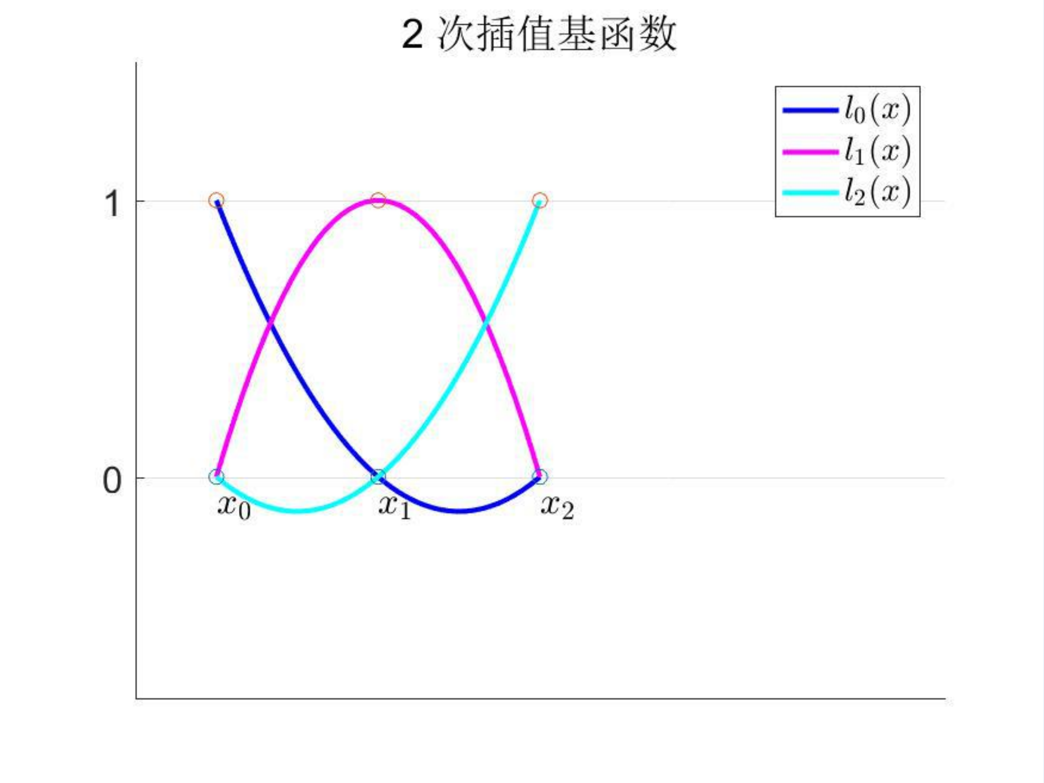
$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \quad l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

抛物线插值

二次插值基函数 $l_k(x),\ k=0,1,2$ 在区间 $[x_0,x_2]$ 上的图形如右所示.

注：二次插值多项式与一次插值多项式相比，仍沿用 l_0,l_1 来表示基函数，只是二次插值多项式中 l_0,l_1 为二次多项式 .

注意到 $L_2(x)$ 在几何上是通过三点 (x_0,y_0) (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 的抛物线，因此 $L_2(x)$ 也称为抛物线插值多项式.



拉格朗日插值多项式

定义1

若 n 次多项式 $l_k(x)$ $(k=0,1,\cdots,n)$ 在 $n+1$ 个节点 $x_0<x_1<\cdots<x_n$ 上满足条件

$$l_k(x_j)=\delta_{kj}=\begin{cases}1, & k=j,\\ 0, & k\neq j,\end{cases}\quad k,j=0,1,\cdots,n, \tag{2.2.2}$$

称这 $n+1$ 个 n 次多项式 $l_k(x)$ $(k=0,1,\cdots,n)$ 分别为节点 $x_k(k=0,1,\cdots,n)$ 上的 n 次插值基函数.

拉格朗日插值多项式

下面利用 (2.2.2) 推出$l_k(x)$的表达式.

当 $k \neq j$ 时, $l_k(x_j) = 0$, 从而 $l_k(x)$ 中含有 $x - x_j$.

即

$$l_k(x) = c(x)(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n).$$

注意 $l_k(x)$ 为 n 次多项式, 从而 $c(x) = c$ 为常数.

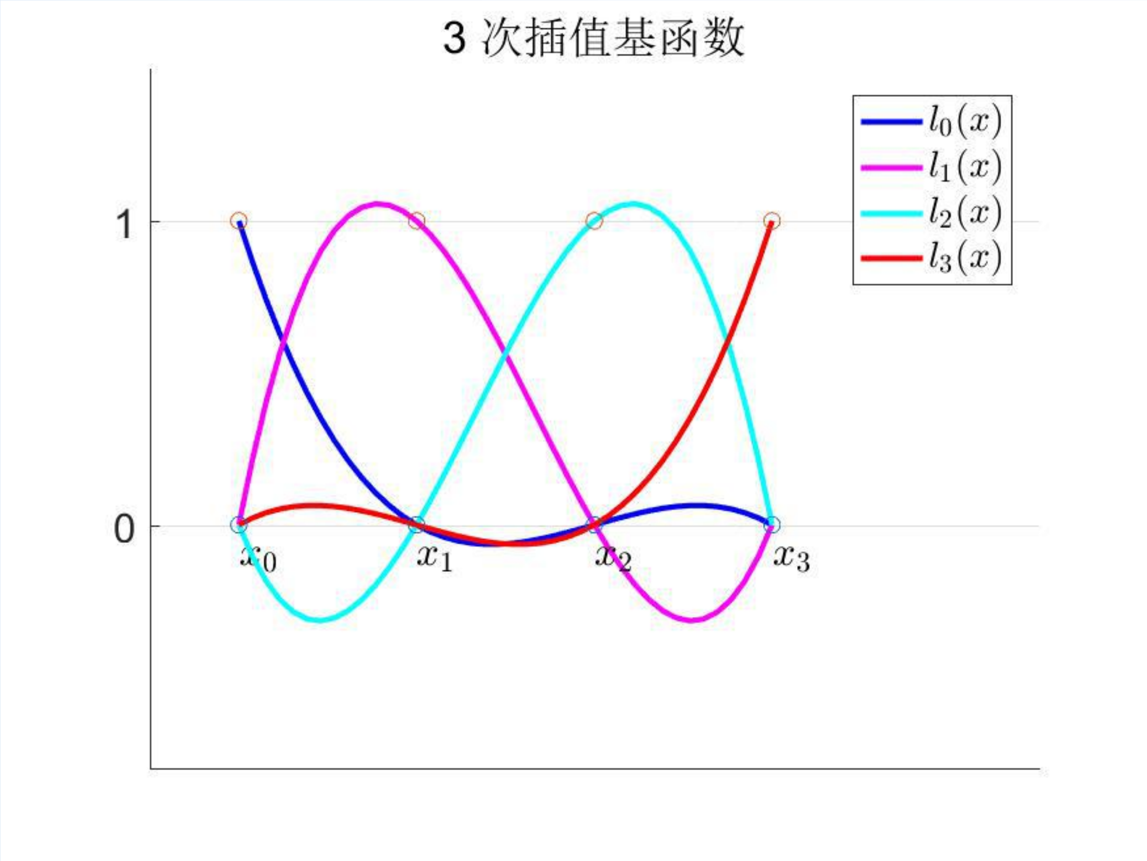
又当 $k = j$ 时, $l_k(x_j) = 1$, 于是有

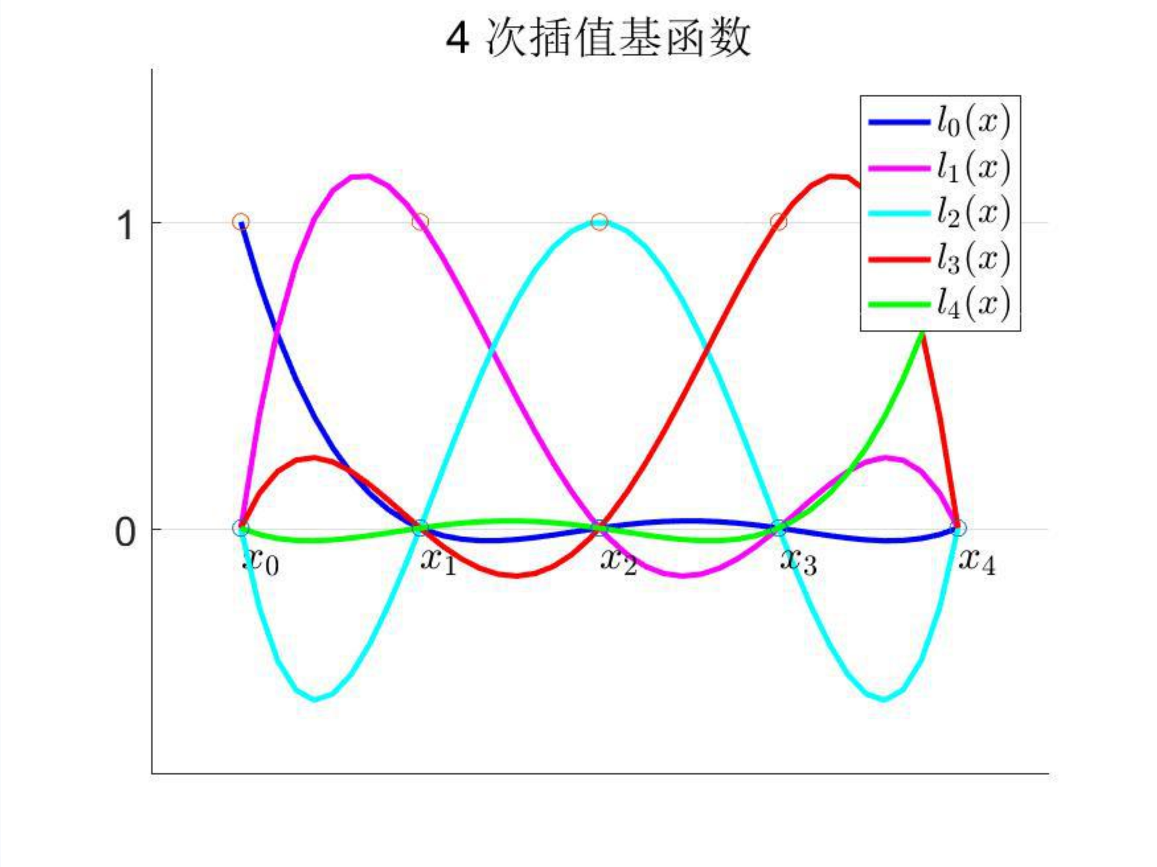
$$c = \frac{1}{(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}.$$

至此, 得到满足(2.2.2) 的 n 次多项式 $l_k(x)$.

拉格朗日插值多项式

3次、4次插值基函数分别如下图所示.





拉格朗日插值多项式

一般地，n 次插值多项式为

$$\boxed{L_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x),} \tag{2.2.3}$$

其中

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

定义2

称形如 (2.2.3) 的插值多项式 $L_n(x)$ 为拉格朗日插值多项式.

注：线性插值和抛物线插值是拉格朗日插值多项式在 $n = 1$ 和 $n = 2$ 时的特例.

3 融会贯通

digest

- 问题求解
- 方法比较

问题求解

例(甘油粘度问题) 甘油（丙三醇，$C_3H_5(OH)_3$）是一种液体，可作为制造从肥皂到(爆炸性的)硝化甘油等诸多产品的原料.

甘油的粘度值 μ 是关于温度 T 的函数 $\mu=\mu(T)$. 经测量，甘油在给定的温度下的粘度值如下表所示.

$T(°C)$	0	10	20	30	40	50
$\mu(N\cdot s/m)$	10.60	3.810	1.492	0.6290	0.2754	0.1867

因生产需求，现需计算甘油在 $22°C$ 下的粘度值 (结果保留四位有效数字) .

问题求解

下面考察甘油在 $22°C$ 下的粘度的插值计算.

令 $n=1$, 则在点 (T_2,μ_2) 和 (T_3,μ_3) 上的线性插值多项式为

$$
\begin{aligned}
L_1(T) &= \mu_2\frac{T-T_3}{T_2-T_3}+\mu_3\frac{T-T_2}{T_3-T_2}\\
&= 1.492\frac{T-30}{20-30}+0.6290\frac{T-20}{30-20}\\
&= -0.08630T+3.2180.
\end{aligned}
$$

从而,得到了甘油在 $22°C$ 下的粘度 $\mu(22)$ 的近似值

$$L_1(22)=1.3194.$$

问题求解

令 $n=2$，则在点 (T_1,μ_1)，(T_2,μ_2) 和 (T_3,μ_3) 上的二次插值多项式为

$$
\begin{aligned}
&L_2(T)\\
&=\mu_1\frac{(T-T_2)(T-T_3)}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)}+\mu_2\frac{(T-T_1)(T-T_3)}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)}+\mu_3\frac{(T-T_1)(T-T_2)}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)}\\
&=3.810\frac{(T-20)(T-30)}{(10-20)(10-30)}+1.492\frac{(T-10)(T-30)}{(20-10)(20-30)}+0.6290\frac{(T-10)(T-20)}{(30-10)(30-20)}\\
&=0.0031(T-10)(T-20)-0.0149(T-10)(T-30)+0.0191(T-20)(T-30).
\end{aligned}
$$

从而,得到了甘油在 $22°C$ 下的粘度 $\mu(22)$ 的近似值

$$L_2(22)\approx 1.2030.$$

问题求解

类似地，分别令 $n=3,4,5$，在取定相应的点后，得到的插值多项式为

$$
\begin{aligned}
L_3(T) = {} & 1.0483\times 10^{-4}T(T-10)(T-20) \\
& -7.4600\times 10^{-4}T(T-10)(T-30) \\
& +0.0019T(T-20)(T-30) \\
& -0.0018(T-10)(T-20)(T-30),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_4(T) = {} & 1.1475\times 10^{-6}T(T-10)(T-20)(T-30) \\
& -1.0483\times 10^{-5}T(T-10)(T-20)(T-40) \\
& +3.7300\times 10^{-6}T(T-10)(T-30)(T-40) \\
& -6.3500\times 10^{-5}T(T-20)(T-30)(T-40) \\
& +4.4167\times 10^{-5}(T-10)(T-20)(T-30)(T-40),
\end{aligned}
$$

问题求解

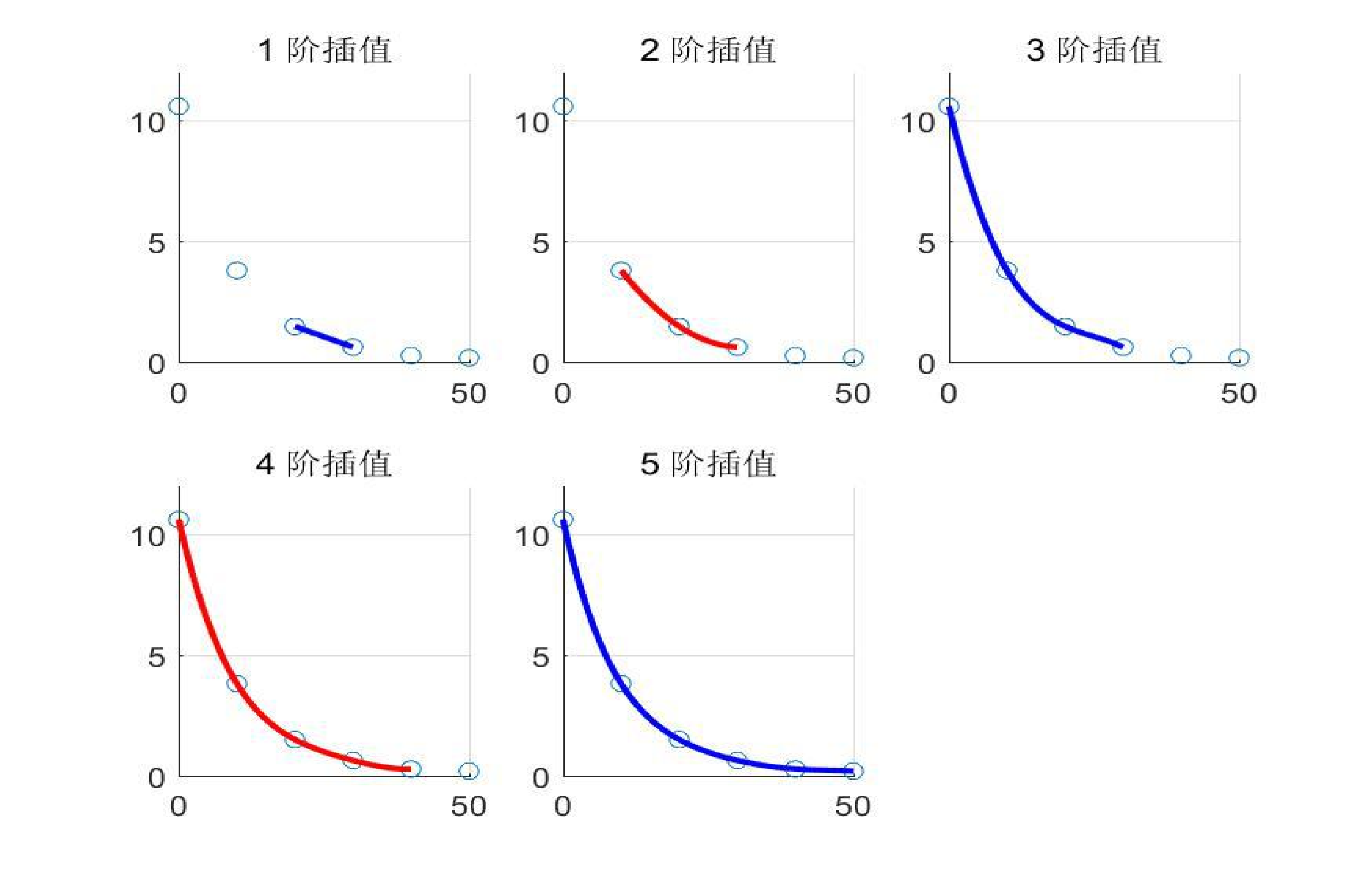
$$
\begin{aligned}
L_5(T) = {} & 1.5558\times 10^{-8}T(T-10)(T-20)(T-30)(T-40)\\
& -8.8333\times 10^{-7}(T-10)(T-20)(T-30)(T-40)(T-50)\\
& -1.1475\times 10^{-7}T(T-10)(T-20)(T-30)(T-50)\\
& +5.2417\times 10^{-7}T(T-10)(T-20)(T-40)(T-50)\\
& -1.2433\times 10^{-6}T(T-10)(T-30)(T-40)(T-50)\\
& +1.5875\times 10^{-6}T(T-20)(T-30)(T-40)(T-50).
\end{aligned}
$$

相应的实验数据如下.

n	dots	$\mu(22)$
1	$(T_i,\mu_i)\ (i=2,3)$	1.3194
2	$(T_i,\mu_i)\ (i=1,2,3)$	1.2030
3	$(T_i,\mu_i)\ (i=0,\cdots,3)$	1.2995
4	$(T_i,\mu_i)\ (i=0,\cdots,4)$	1.2631
5	$(T_i,\mu_i)\ (i=0,\cdots,5)$	1.2544

问题求解

插值多项式曲线如下.



方法比较

拉格朗日插值多项式与单项式基本插值公式相比，有如下优势.

(1) 建立拉格朗日插值多项式不需要解方程组.

(2) 拉格朗日多项式的估计值受舍入误差影响较小.

需要指出的是，无论是使用单项式基本插值公式、拉格朗日插值公式，还是用其他多项式插值公式，都有如下结论:

通过 $n+1$个节点 (x_i, y_i) 的 n 次多项式是唯一的！

4 课堂小结

In-class conclusion

- 知识小贴士
- 课程反思

课堂小结

知识小贴士

拉格朗日插值多项式可以利用相应的基函数进行构造，具有形式简单、易于编程等特点，但在计算时却相对复杂，需要进一步改进.

课程反思

反思

当已知数据个数对由 n 增加到 $n+1$ 时，拉格朗日插值公式需要重新计算所有基函数，这给这种插值方法带来了很大的计算量.如何利用前期计算成果，才能避免这种情况呢？

谢 谢